Agrégation de mathématiques 1987

Mathématiques générales

6454. Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Dans tout le problème, on fixe un entier n strictement positif, et on note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

On munit E de sa structure standard d'espace euclidien. Pour x et y dans E, on note $\|x\|$ la norme de x et $x.y$ le produit scalaire de x et y ; si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on a donc :

$$x.y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n, \qquad \|x\|^2 = x.x.$$

On note O l'élément neutre de (E, +).

On note $\mathcal{I}_s$ le groupe des applications *affines* isométriques de E dans lui-même, $\mathcal{O}$ le sous-groupe de $\mathcal{I}_s$ formé des applications *linéaires* isométriques (le groupe orthogonal de E), $\mathcal{T}$ le sous-groupe formé des translations ; si x appartient à E, on note t_x la translation de vecteur x ; si X est une partie de E, on note $\mathcal{T}_X$ l'ensemble des translations dont les vecteurs sont dans X ; on note I l'application identité de E, translation de vecteur nul.

On note $\mathcal{L}$ l'algèbre End (E) des applications linéaires de E dans E. On munit $\mathcal{L}$ de la norme des opérateurs : la norme d'un élément f de $\mathcal{L}$ est

$$\|f\| = \sup \{\|f(x)\|/\|x\| \mid x \in E,\ x \neq O\}.$$

On munit $\mathcal{L}$ et ses sous-ensembles de la topologie induite par cette norme.

Si Γ est un groupe et α, β deux éléments de Γ, on note $[\alpha, \beta]$ le commutateur $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ de α et β. On rappelle qu'un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* (ou *normal*) si, quels que soient α dans Δ et β dans Γ, alors $\beta\alpha\beta^{-1}$ appartient à Δ.

Pour tout entier g strictement positif, on note $\mathbb{N}_g$ l'ensemble des entiers de 1 jusqu'à g.

Un sous-groupe G de $\mathscr{I}_s$ est dit *cristallographique* s'il vérifie les deux conditions C1 et C2 suivantes :

C1. — Il existe un nombre réel d tel que, pour tout vecteur x de E, il existe un élément α de G vérifiant $\|\alpha(0) - x\| \leqslant d$.

C2. — Quel que soit le nombre réel T, il existe seulement un nombre fini d'éléments α de G vérifiant $\|\alpha(0)\| \leqslant T$.

Le but du problème est la démonstration du théorème suivant, dû à L. BIEBERBACH.

THÉORÈME : Tout sous-groupe cristallographique de $\mathscr{I}_s$ contient n translations linéairement indépendantes.

I. — PRÉLIMINAIRES.

A. — Décomposition des éléments de $\mathscr{I}_s$.

1° Soit α un élément de $\mathscr{I}_s$; montrer qu'il existe un, et un seul, élément (a, A) de $\mathrm{E} \times \mathcal{O}$ tel que $\alpha = t_a \circ \mathrm{A}$.

NOTATION : On pose $a = \tau(\alpha)$, $\mathrm{A} = \pi(\alpha)$, et on note π l'application $\alpha \mapsto \pi(\alpha)$ de $\mathscr{I}_s$ dans $\mathcal{O}$, τ l'application $\alpha \to \tau(\alpha)$ de $\mathscr{I}_s$ dans E.

2° Prouver que π est un morphisme de groupes de $\mathscr{I}_s$ dans $\mathcal{O}$.
Déterminer son image et son noyau.

3° Si G est un sous-groupe de $\mathscr{I}_s$, prouver que $\mathrm{G} \cap \mathscr{T}$ est un sous-groupe abélien distingué de G.
Soit α un élément de $\mathscr{I}_s$. Posons $a = \tau(\alpha)$ et $\mathrm{A} = \pi(\alpha)$.

4° Soit x un vecteur de E ; prouver qu'on a

$$\alpha \circ t_x \circ \alpha^{-1} = t_{\mathrm{A}(x)}.$$

Soit β un autre élément de $\mathscr{I}_s$. Posons $b = \tau(\beta)$ et $\mathrm{B} = \pi(\beta)$.

5° Calculer $\tau(\alpha\beta)$ en fonction de a, A, b et B.

6° Calculer $\tau(\alpha^{-1})$ et $\pi(\alpha^{-1})$ en fonction de a et A.

7° Posons $\gamma = [\alpha, \beta]$. Prouver qu'on a

$$\pi(\gamma) = [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$$

et

$$\tau(\gamma) = (\mathrm{A} - \mathrm{I})(b) + (\mathrm{I} - [\mathrm{A}, \mathrm{B}])(b) + \mathrm{A}(\mathrm{I} - \mathrm{B})\mathrm{A}^{-1}(a).$$

B. — Étude de la norme d'opérateurs.

Si f est un élément de $\mathscr{L}$, on note f^* l'endomorphisme adjoint de f.

1° Montrer que l'application $f \mapsto f^*f$ de $\mathscr{L}$ dans lui-même est continue. Prouver que $\mathcal{O}$ est compact et que les applications $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{AB}$ de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ et $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^{-1}$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ sont continues.

2° Soit f un élément de $\mathscr{L}$. Montrer que f^*f est diagonalisable dans une base orthonormale de E, que ses valeurs propres sont des nombres réels positifs et que $\|f\|^2$ est la plus grande valeur propre de f^*f.

Pour tout élément f de $\mathscr{L}$, on note E_f l'ensemble des vecteurs x de E vérifiant $\|f(x)\| = \|f\| . \|x\|$.

3° Soit f un élément de $\mathscr{L}$. Prouver que E_f est un sous-espace vectoriel de E, non réduit à $\{0\}$.

4° Quels sont les éléments f de $\mathscr{L}$ pour lesquels E_f est E tout entier ?

5° Soient f dans $\mathscr{L}$ et A dans $\mathcal{O}$. Prouver qu'on a

$$\|f\| = \|f\mathrm{A}\| = \|\mathrm{A}f\|.$$

Pour tout élément A de $\mathcal{O}$, on pose $m(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A} - \mathrm{I}\|$ et on note $\mathrm{M_A}$ l'espace vectoriel $\mathrm{E_{A-I}}$, $\mathrm{M_A^\perp}$ son orthogonal dans E.

6° Soit A un élément de $\mathcal{O}$, prouver que $\mathrm{M_A}$ et $\mathrm{M_A^\perp}$ sont stables par A.

7° Soient A et B dans $\mathcal{O}$, prouver qu'on a

$$m([\mathrm{A}, \mathrm{B}]) = \|\mathrm{AB} - \mathrm{BA}\|$$

et en déduire l'inégalité

$$m([\mathrm{A}, \mathrm{B}]) \leqslant 2m(\mathrm{A})m(\mathrm{B}).$$

Soit A dans $\mathcal{O}$; si $M_A^\perp$ est réduit à $\{0\}$ on pose $m^\perp(A) = 0$, sinon, on pose

$$m^\perp(A) = \sup\{\|A(x) - x\|/\|x\| \mid x \in M_A^\perp,\ x \neq 0\}.$$

8° Soit A dans $\mathcal{O}$; prouver qu'on a

$$0 \leqslant m(A) - m^\perp(A) \leqslant 2.$$

9° Quels sont les éléments A de $\mathcal{O}$ tels que $m(A) = m^\perp(A)$?

10° Quels sont ceux vérifiant $m(A) = m^\perp(A) + 2$?

II. — Étude des sous-groupes cristallographiques formés de translations.

On dit qu'un sous-groupe de (E, +) est un *réseau* s'il est engendré par les vecteurs d'une base de E. Dans cette partie **II**, on considère un sous-groupe L de (E, +) et on note $\mathcal{T}_L$ le sous-groupe de $\mathcal{T}$ associé à L. On veut prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{T}_L$ soit cristallographique est que L soit un réseau.

A. — On suppose d'abord que L est un réseau. Prouver que $\mathcal{T}_L$ est cristallographique.

B. — Soit maintenant L un sous-groupe quelconque de (E, +). Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs de L.

1° Prouver que si F est distinct de E, $\mathcal{T}_L$ n'est pas cristallographique.

2° En déduire que si $\mathcal{T}_L$ est cristallographique, alors L contient n vecteurs de E linéairement indépendants.

C. — Soient L un sous-groupe de (E, +) tel que $\mathcal{T}_L$ est cristallographique et $w_1, \ldots, w_n$ n vecteurs de E, linéairement indépendants, contenus dans L. On note $l_1, \ldots, l_n$ les applications coordonnées dans la base $(w_1, \ldots, w_n)$ de E.

Soient x et y deux éléments de E ; nous dirons qu'on a $x \leqslant y$ si $x = y$ ou s'il existe k dans $\mathbb{N}_n$ tel qu'on ait $l_i(x) = l_i(y)$ pour tout i dans $\mathbb{N}_n$ strictement plus *grand* que k et $l_k(x) < l_k(y)$.

1° Prouver que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E et que tout sous-ensemble fini non vide de E admet un plus petit élément pour cet ordre.

Soit V l'ensemble des vecteurs *non nuls* de L vérifiant $0 \leqslant l_i(x) \leqslant 1$ pour tout i dans $\mathbb{N}_n$.

2° Prouver que V est fini et qu'il existe une suite $v_1, \ldots, v_n$ de vecteurs dans V, uniquement déterminée par les conditions **(i)** et **(ii)** suivantes :

(i) v_1 est le plus petit élément de V ;

(ii) pour tout k dans $\mathbb{N}_{n-1}$, si on note F_k le sous-espace vectoriel de E engendré par $v_1, \ldots, v_k$, alors v_{k+1} est le plus petit élément de V n'appartenant pas à F_k.

3° Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E et qu'on a

$$0 < l_j(v_j) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad l_i(v_j) = 0$$

pour tout j dans $\mathbb{N}_n$ et tout i dans $\mathbb{N}_n$ tels que $i > j$.

On note L′ le réseau de E engendré par $v_1, \ldots, v_n$.

4° Prouver que pour tout x dans L, il existe x' dans L′ tel que, pour tout j dans $\mathbb{N}_n$, on ait

$$0 \leqslant l_j(x - x') < l_j(v_j).$$

5° Montrer qu'on a L = L′.

III. — Réseaux et groupes cristallographiques.

Pour tout sous-groupe L de (E, +), on note S_L le stabilisateur de L dans $\mathcal{O}$, Σ_L le stabilisateur de L dans $\mathcal{I}_s$:

$$S_L = \{A \in \mathcal{O},\ A(L) = L\}$$

$$\Sigma_L = \{\alpha \in \mathcal{I}_s,\ \alpha(L) = L\}.$$

A. — Soit L un sous-groupe de (E, +).

1° Prouver qu'on a $\Sigma_L \cap \mathscr{T} = \mathscr{T}_L$.

2° Soit G un sous-groupe de $\mathscr{I}_s$ tel que $G \cap \mathscr{T} = \mathscr{T}_L$. Montrer que $\pi(G)$ est inclus dans S_L.

3° Soit G un sous-groupe de $\mathscr{I}_s$ tel que $G \cap \mathscr{T} = \mathscr{T}_L$. Supposons en outre que G est inclus dans Σ_L. Prouver que l'application (τ, π) de $\mathscr{I}_s$ dans $E \times \mathscr{O}$ induit une bijection de G dans $L \times \pi(G)$. Expliciter la loi de groupe sur $L \times \pi(G)$ transportée de celle de G par cette bijection.

B. — Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de $\mathscr{I}_s$ tel que $G \cap \mathscr{T} = \mathscr{T}_L$.

1° Montrer que S_L est fini.

2° Montrer que $\mathscr{T}_L$ est d'indice fini dans G.

3° Prouver que G est cristallographique.

C.1° Pour cette question seulement, supposons $n = 1$ et prenons pour L le réseau $\mathbb{Z}$ de $E = \mathbb{R}$. Décrire les sous-groupes G de $\mathscr{I}_s$ tels que $G \cap \mathscr{T} = \mathscr{T}_L$.

2° Pour cette question seulement, supposons $n = 2$ et prenons pour L le réseau $\mathbb{Z}^2$ de $E = \mathbb{R}^2$. Calculer le cardinal de S_L.

D. — Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de $\mathscr{I}_s$ tel que $G \cap \mathscr{T} = \mathscr{T}_L$. Soit H un sous-groupe *abélien* de G, *distingué* dans G.

1° Pour x dans L et A dans $\pi(H)$ prouver qu'on a $(A - I)^2(x) = 0$ (on pourra utiliser le fait que si un élément α de G vérifie $A = \pi(\alpha)$, alors α commute à $t_x \alpha t_{-x}$).

2° Prouver qu'on a $H \subset \mathscr{T}$.

3° Que peut-on dire si G est abélien ?

IV. — Preuve du théorème.

Dans cette partie **IV** du problème, on fixe un sous-groupe cristallographique G de $\mathscr{I}_s$ et on choisit un nombre réel $d > 0$ tel que la condition C1 soit vérifiée.

A. — Soit u un vecteur unitaire de E.

1° Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$ et une suite $(\beta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telles que

(i) pour tout entier naturel q, on ait $\|\tau(\beta_q) - k_q u\| \leqslant d$;

(ii) la suite $(\pi(\beta_q))_{q \in \mathbb{N}}$ converge.

2° En déduire qu'il existe une suite $(\beta'_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que $\tau(\beta'_q)$ soit non nul à partir d'un certain rang, que $\pi(\beta'_q)$ converge vers Γ et que $\dfrac{u.\tau(\beta'_q)}{\|\tau(\beta'_q)\|}$ converge vers 1.

(On pourra prendre β'_q de la forme $\beta_r \beta_q^{-1}$, où l'entier r est convenablement choisi.)

B. — Pour toute partie non vide X de G, on pose $\delta(X) = \inf\limits_{\alpha \in X} \|\tau(\alpha)\|$.

1° Soit X une partie non vide de G. Prouver qu'il existe un élément α de X tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(X)$.

Dans la suite de cette partie **IV.B**, on note Y l'ensemble des éléments α de G tels que $0 < m(\pi(\alpha)) \leqslant 1/2$. On désire prouver par l'absurde que Y est vide.

2° Jusqu'en **IV.B.5**, supposons que Y est non vide et choisissons α dans Y tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(Y)$. Posons $A = \pi(\alpha)$, $a = \tau(\alpha)$ et notons p, q les projecteurs orthogonaux sur les espaces M_A et $M_A^\perp$ respectivement, sous-espaces de E associés à A en **I.B.**

Prouver qu'il existe un élément β de G tel que, posant $B = \pi(\beta)$ et $b = \tau(\beta)$, on ait

$$\|q(b)\| < \|p(b)\| \qquad \text{et} \qquad m(B) \leqslant \frac{1}{8}(m(A) - m^\perp(A)).$$

(On pourra choisir un vecteur unitaire u de E et utiliser **II.A.**)

Soit Z l'ensemble des éléments de G vérifiant ces conditions, et choisissons $\beta \in Z$ tel que $\|\tau(\beta)\| = \delta(Z)$. Posons $B = \pi(\beta)$, $b = \tau(\beta)$, $\gamma = [\alpha, \beta]$. On pose $C = \pi(\gamma)$, $c = \tau(\gamma)$ (calculés en I.A.7) et $r = c - (A - I)b$.

3° Prouver qu'on a $m(C) \leqslant m(B)$.

4° Si β est une translation, vérifier qu'on a $r = 0$, $\|q(c)\| < \|p(c)\|$ et $\|c\| < \|b\|$.

5° Supposons que β n'est pas une translation ; prouver successivement :

(i) $\|a\| \leqslant \|b\|$

(ii) $\|r\| \leqslant 2m(B)\|b\|$

(iii) $\|r\| < \frac{1}{2}(m(A) - m^{\perp}(A))\|p(b)\|$

(iv) $\|q(c)\| < \frac{1}{2}(m(A) + m^{\perp}(A))\|p(b)\| < \|p(c)\|$

(v) $\|c\| < \|b\|$.

6° Déduire de ce qui précède que Y est vide.

7° En choisissant une base de E formée de vecteurs unitaires, prouver qu'il existe une base $(w_1, \ldots, w_n)$ de E telle que tw_i soit dans G pour tout entier i dans $\mathbb{N}_n$.

8° Posant $L = \tau(G \cap \mathscr{T})$, prouver que L est un réseau de E.

Agrégation de mathématiques

Composition d'analyse

Notations

On note $x = (x_1, x_2)$ un point du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, avec le produit scalaire canonique $x.x' = x_1x'_1 + x_2x'_2$, et la norme euclidienne $\|x\|$. On désigne par $D(x, r)$, respectivement $C(x, r)$, le disque fermé, respectivement le cercle, de centre x et de rayon $r \geqq 0$; on écrira $D(0, 1) = D$ et $C(0, 1) = C$ pour abréger. On dit que $C(x', r')$ *entoure* $D(x, r)$ si $D(x, r)$ est contenu dans l'intérieur de $D(x', r')$, c'est-à-dire si $\|x' - x\| < r' - r$. On note R_θ pour θ réel, la rotation d'angle θ autour de l'origine.

Toutes les fonctions considérées sont *à valeurs réelles*. On note supp f le *support* d'une fonction f, adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) \neq 0$. On note $dx = dx_1\, dx_2$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$. Une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ est dite *radiale* si $f(R_\theta x) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit L la droite affine de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x.u_\alpha = p$, avec $p, \alpha \in \mathbb{R}$, et $u_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha) \in C$. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note f_L, ou $\hat{f}(p, \alpha)$, l'intégrale :

$$f_L = \hat{f}(p, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(pu_\alpha + tu_{\alpha+\frac{\pi}{2}})\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(pu_\alpha + tu_{\alpha+\frac{\pi}{2}})\, dt,$$

lorsque cela a un sens. De manière analogue, pour $\Gamma = C(a, r)$, on pose :

$$f_\Gamma = \int_0^{2\pi} f(a + ru_\theta)\, d\theta,$$

avec $a \in \mathbb{R}^2$, $r \geqq 0$.

On rappelle la *formule de Green-Riemann :* si γ est une courbe C^1 par morceaux constituant le bord orienté d'un compact K du plan, et P_1, P_2 deux fonctions numériques de classe C^1 au voisinage de K, on a :

$$\iint_K \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 = \int_\gamma P_1(x_1, x_2)\, dx_1 + P_2(x_1, x_2)\, dx_2.$$

fesseur J. Hjelmslev à C. Juel pour son 70e anniversaire lors de son jubilé scientifique le 25 janvier 1925. Elle est actuellement à l'Institut Mathématique de Copenhague.

Bibliographie.

Birkoff et Mac Lane, *Algèbre, exercices*, 2e partie, Gauthiers-Villars 1973, pages 165, 166, 169, 170.
Bouvier et Georges, *Dictionnaire des mathématiques*, PUF, 1979, pages 720 et 190.
Bronstein, *Aide mémoire de mathématiques*, Eyrolles, 1983, pages 716 et 822.
Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann 1971, page 56.
Chambadal, *Exercices d'Algèbre*, Gauthiers-Villars, 1972, pages 120 et 151.
Chambadal et Ovaert, *Algèbre tensorielle et linéaire*, Dunod, 1968, pages 381 à 384.
Creystey, *Exercices et problèmes résolus*, Dunod, 1972, Tome I, page 164.
Deheuvels, *Formes quadratiques et groupes classiques*, PUF, 1981, pages 410, 446, 450.
Delachet, *La géométrie contemporaine*, PUF, 1965, Que sais-je 401, pages 119-121.
Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures*, Gauthiers-Villars, 1979, pages 35 et 48.
Épistemon, *Algèbre* 1, Cedic, 1981, page 59.
Favard, *Géométrie différentielle locale*, Gauthiers-Villars, 1956, page 84.
Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique*, Hermann, 1969, pages 81, 86, 109, 110, 129.
Landau, *Mécanique*, Édition de Moscou, 1960, pages 185 et 191.
Leichtnamm et Schauer, *Exercices d'Algèbre* 1, Ellipses, SPM Marketing, 1982, page 159.
Queysanne, *Algèbre*, Armand Colin, 1964, page 365.
Problème ULM 1974, Première composition, solution de M. Carpentier.
Problème ENSAE, 1975, Ronéo 1979.
Dictionnaire EDM à l'alinéa PFAFF.

Agrégation de mathématiques

Mathématiques générales

6454.

(*Voir l'énoncé complet dans la Revue n° 1, page 1.*)

Partie I

A. – 1° Si $\alpha = t_a \circ A$, on a $\alpha(0) = a$ d'où l'unicité de a et donc celle de A puisqu'alors $A = t_{-a} \circ \alpha$. Inversement soit A l'application linéaire tangente à α. C'est un élément de $\mathcal{O}$ et on a bien évidemment $\alpha = t_{\alpha(0)} \circ A$ (les deux applications affines ayant même application linéaire tangente et coïncidant sur le point O).

A. – 2° Il est bien connu que l'application qui à une application affine associe son application linéaire tangente est multiplicative et donc r est un morphisme de groupe de $\mathcal{I}s$ dans O. Pour $A \in \mathcal{O}$, on a $r(A) = A$, donc r est surjective. Le noyau de r est bien évidemment T.

A. – 3° $G \cap T$ est le noyau de $\pi|_T$ donc il est distingué dans G. Comme T est abélien, $G \cap T$ est aussi abélien.

A. – 4° $\alpha \circ t_x \circ \alpha^{-1}$ est une translation car T est distingué dans $\mathcal{I}s$. On a $\alpha \circ t_x \circ \alpha^{-1}(\alpha(0)) = \alpha(x)$ donc c'est la translation de vecteur $\alpha(x) - \alpha(0)$ c'est-à-dire $A(x)$.

A. – 5° On a $\alpha\beta = t_a A t_b B = t_a A t_b A^{-1} AB = t_a t_{A(b)} AB$, d'où $\tau(\alpha\beta) = a + A(b)$.

A. – 6° En prenant $\beta = \alpha^{-1}$, on obtient $0 = \tau(I) = a + A(b)$, soit $b = -A^{-1}(a)$, c'est-à-dire $\tau(\alpha^{-1}) = -A^{-1}(a)$.

A. – 7° On a $\pi([\alpha, \beta]) = [A, B]$ car π est un morphisme. Par les questions 5° et 6°, on obtient $\tau(\alpha\beta) = a + A(b)$ et $\tau(\alpha^{-1}\beta^{-1}) = -A^{-1}(a) - A^{-1}B^{-1}(b)$ puis

$$\tau(\gamma) = a + A(b) - ABA^{-1}(a) - ABA^{-1}B^{-1}(b) = (A - I)(b) + (I - [A, B])(b) + A(I - B)A^{-1}(a).$$

B. – 1° A l'aide de la base canonique, $\mathcal{Y}$ s'identifie à l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n l'application $f \mapsto f^*f$ à l'application $M \mapsto {}^tMM$ qui est polynomiale et donc continue.

$\mathcal{O}$ est l'image réciproque de (1) par cette application, il est donc fermé. Les matrices d'éléments de $\mathcal{O}$ ont des vecteurs colonnes de norme 1 ; leurs coefficients sont donc de valeur absolue inférieure à 1 et par suite $\mathcal{O}$ est borné dans $\mathcal{L}$. On en déduit donc que $\mathcal{O}$ étant fermé borné dans un espace vectoriel de dimension finie est compact. L'application $(A, B) \mapsto AB$ est la restriction de la composition des endomorphismes qui est bilinéaire donc continue, l'application $A \mapsto A^{-1}$ qui s'identifie à la transposition des matrices est bien évidemment continue.

B. – 2° f^*f est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée. Ses valeurs propres sont donc des nombres réels. Soit λ une de ses valeurs propres et x un vecteur propre associé. On a

$$\lambda\|x\|^2 = f^*f(x).x = f(x).f(x) \geqslant 0$$

et donc $\lambda \geqslant 0$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres, avec $f^*f(e_i) = \lambda_i e_i$ et $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ et soit $x = \Sigma x_i e_i$. On a alors

$$f^*f(x) = \Sigma\lambda_i x_i e_i \quad \text{et} \quad \|f(x)\|^2 = f^*f(x).x = \Sigma\lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_1\|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_1$. On a donc $\|f\|^2 = \lambda_1$.

B. – 3° L'égalité $\|f(x)\| = \|f\|\|x\|$ s'écrit encore $\|f(x)\|^2 = \|f\|^2\|x\|^2$ soit avec les notations de la question précédente $\Sigma\lambda_i x_i^2 = \lambda_1\Sigma x_i^2$. Ceci nécessite que $x_i = 0$ si $\lambda_i \neq \lambda_1$. Donc E_f est l'espace propre de f^*f associé à la valeur propre $\lambda_1 = \|f\|^2$. C'est un sous-espace vectoriel de E non réduit à 0.

B. – 4° Si $E_f = E$, alors $f^*f = \|f\|^2 I$, donc soit $f = 0$, soit $f/\|f\|$ est un élément de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire que f est une similitude. Inversement, il est clair que les similitudes conviennent.

B. – 5° on a $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|, \|x\| = 1\} = \sup\{\|Af(x)\|, \|x\| = 1\} = \|Af\|$. De plus $x \mapsto A(x)$ est une bijection de la sphère-unité de E sur elle-même et donc

$$\|fA\| = \sup\{\|f(A(x))\|, \|x\| = 1\} = \sup\{\|f(y)\|, \|y\| = 1\} = \|f\|.$$

B. – 6° soit $x \in M_A$, c'est-à-dire $\|A(x) - x\| = \|A - I\|.\|x\|$; comme A conserve la norme on a

$$\|A^2(x) - A(x)\| = \|A - I\|\|A(x)\|, \quad \text{donc} \quad A(x) \in M_A.$$

Donc M_A est stable par A et puisque A est orthogonal, $M_A^\perp$ est aussi stable par A.

B. – 7° D'après la question 5°, on a

$$m([A, B]) = \|ABA^{-1}B^{-1} - I\| = \|(ABA^{-1}B^{-1} - I)BA\| = \|AB - BA\|.$$

On en déduit que

$$m([A, B]) = \|(A - I)(B - I) - (B - I)(A - I)\| \leqslant 2\|A - I\|.\|B - I\| = 2m(A)m(B).$$

B. – 8° On a $0 \leqslant m^1(A) \leqslant m(A) = \|A - I\| \leqslant \|A\| + \|I\| = 2$, et donc $0 \leqslant m(A) - m^1(A) \leqslant 2$.

B. – 9° Soit $x \in M_A^\perp$, $x \neq 0$. Alors on a $\|(A - I)(x)\| < m(A)\|x\|$ et si $M_A^\perp \neq \{0\}$, on obtient $m^1(A) < m(A)$ car la sphère-unité de $M_A^\perp$ est compacte et donc que

$$m^1(A) = \sup\{\|A(x) - x\|, x \in M_A^\perp, \|x\| = 1\}$$

est atteint pour un certain x. Si $m(A) = m^1(A)$, on a donc $M_A^\perp = \{0\}$ et donc $A = I$.

B. – 10° On n'a $m(A) = m^1(A) + 2$ que si $m(A) = 2$ et $m^1(A) = 0$. Il faut donc que A induise I sur $M_A^\perp$ et que pour tout x dans M_A on ait

$$\|A(x) - x\| = 2\|x\| = \|A(x)\| + \|x\|.$$

Ceci nécessite que A induise sur M_A une homothétie (car, pour tout x dans M_A, x et $A(x)$ doivent être colinéaires) qui ne peut être que $-I$. A est donc la symétrie orthogonale par rapport à $M_A^\perp$. Inversement il est clair que pour tout sous-espace vectoriel F de E, si A est la symétrie orthogonale par rapport à F, on a $M_A = F^\perp$ et $M_A^\perp = F$ et donc $m(A) = 2$ et $m^1(A) = 0$, soit $m(A) = m^1(A) + 2$.